Rentesregning

Vi skal kigge på hvordan en "lille" rente kan have stor betydning på den samlede gæld. Vi skal kigge på lånetyper og opsparings samt gældsformlerne.

Version 5.1

Sct. Knud

Henrik S. Hansen

Dine drømme er kun et klik væk...

Lån op til 25.000 kr. nu

Ny bærbar, ferie eller bare ren og skær forkælelse? Nu kan det blive virkelighed. Og hos F.Usk låner du på dine betingelser:

Vi blander os ikke i hvad du bruger pengene til
Få pengene direkte ind på din konto
Bestem selv hvor meget du vil betale hver måned

Opgaver til hæftet kan hentes her. PDF

Facit til opgaverne kan hentes her. PDF

Indhold

Procentregning

Rentesregning er blot en udvidelse af den velkendte procentregning. Der er ikke mange, der er i tvivl om, hvordan man beregner salgsprisen for en vare, når man kender købsprisen og fortjenesten i procent. (video)

Kort fortalt: procent betyder pr. hundrede.

Hvis vi skal tage 23% af 120kr, så gør vi følgende $\frac{120}{100} \cdot 23 = 27.6$ eller $\frac{23}{100} \cdot 120 = 27.6$

Lav opgaver i hæftet

Fremadgående rentesregning

Når vi skal ligge en procent til tal, kan vi gange med fremskrivningsfaktoren.

Definition: Fremskrivningsfaktor

En fremskrivningsfaktor er på formen (1+r), hvor $r = \frac{p}{100}$ og kaldes for vækstraten. P er det antal procent som skal lægges til.

Sætning: Fremskrivning med procent

Man lægger p procent til et tal K_0, ved at gange det med fremskrivningsfaktoren

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + r)$$

Bevis: (video)

$$Nyt\ tal = Gl\ tal + procent$$

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100}$$

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot r$$

$$K_1 = K_0(1 + r)$$

Hermed bevist.

Sætningen gælder også hvis der skal trækkes procent fra. I det tilfælde er **r** (altså vækstraten) blot negativ.

Eksempelvis:

Hvis vi skal lægge 25% til 8000kr får vi $8000 \cdot 1.25 = 10000$

Lav opgaver i hæftet

Tilbagegående rentes regning

Når vi som forbruger køber en vare, får vi normalt opgivet prisen incl. moms, som er den pris, som vi skal betale. Mange virksomheder har dog brug for at kende prisen uden moms. Under fremskrivning beregnede vi en procentvis fremskrivning ved at gange med fremskrivningsfaktoren, så hvis vi skal tilbage igen, kan vi bare dividere med fremskrivningsfaktoren. (video)

Altså vi bruger at $K_1 = K_0 \cdot (1+r)$, som kan skrives om $K_0 = \frac{K_1}{1+r}$

Eksempelvis:

En pose kaffe koster 54,95kr i Netto. Prisen uden moms må være $\frac{54.95kr}{1.25} = 43.96$kr

Lav opgaver i hæftet

Indekstal

Indekstal er beregninger, som viser de procentvise ændringer i en talrække. Indekstal er således en omregning af de absolutte tal til procenttal. (video)

Med udgangspunkt i et basistal, der sættes lig med 100, udtrykkes alle de andre tal som procenter heraf. Den herved fremkomne talrække kaldes et (simpelt) indeks.

Men hvad skal vi bruge det til???
Indekstal har oftest til formål at belyse den tidsmæssige udvikling i talstørrelser eks. prisen for en bestemt vare kontra lønstigningerne. Der vælges et bestemt år, *basisåret*, som sammenlignings år. Ofte vælges det første år som det år, hvor talstørrelsen sættes lig med 100.

Indekstallet bestemmes ved formlen: $Indekstal_{aktuelt\text{ år}} = \frac{aktuelt\text{ år}}{basis\text{ år}} \cdot 100$

Tabellen viser hvordan en vare og lønnen har udviklet sig i perioden 2001-2009

Årstal	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Pris	12.00	12.25	12.50	13.25	13.75	14.5
Indekstal for varen	100	102.08	104.17	110.42	114.58	120.83
Indekstal for lønnen	100	102.9	106.2	110.9	114.1	116.5

Indekstallet for 2006 er beregnet ved $Indekstal_{2006} = \frac{12.25}{12.00} \cdot 100 = 102.08$

Vi kan se, at godt nok har prisen på vores vare ændret sig en del, men det er først de sidste år, at den har ændret sig mere end hvad lønningerne har gjort. Vores købekraft er derfor blevet dårligere (vi kan købe færre is for de samme penge).

Indekstallene kan altså bruges til at sammenligne procentvise ændringer med hinanden. Den hurtige læser kan se, at indekstallet indeholder en procentvis fremgang i forhold til basisåret ☺

Lav opgaver i hæftet

Vejet indekstal

Hvis vi skal kigge på flere poster samtidig, eksempelvis ændringen i boligudgifter (husleje, ejendomsskat og varme, lys og vand) og sige noget om den samlede udgifts ændring år for år, benytter vi os at et vejet indekstal. (video)

Det er klart at meget tunge poster, skal vægte tungere end lette poster, så vi kan ikke bare tage et direkte gennemsnit af indekstallene for de enkelte poster.

Vi omregner vores poster til procent ud af den samlede udgift. Denne procent er så den andel som posten får lov til at bidrage med ud fra dets indekstal.

Vores eksempel kunne se således ud

	Udgift	Indekstal
Husleje	85000	112
Ejendomsskat	16000	127
Vand, lys og varme	19000	136

Samlet er der udgifter for 120000kr.

Andele i procent

Husleje $\frac{85000}{120000} \cdot 100 = 71\%$

Ejendomsskat $\frac{16000}{120000} \cdot 100 = 13\%$

Vand, lys og vand $\frac{19000}{120000} \cdot 100 = 16\%$

Vejet indekstal bliver så $0.71 \cdot 112 + 0.13 \cdot 127 + 0.16 \cdot 136 = 118$

Det vi har fundet nu er det VEJEDE gennemsnit af indekstallene.

Lav opgaver i hæftet

Rentesregning

Rente er et beløb man betaler for at låne penge. Renten betales af den, der låner pengene ☺. Låner vi penge i banken, så betaler vi renter til banken for at låne pengene, og sætter vi penge i banken, så betaler banken os renter for at have rådighed over pengene. (video)

Prøv at undersøge hvad renten er for indlån og udlån i en tilfældig bank, hvilken rente er højest og hvorfor???

Især i bankerne støder vi på udtrykket p.a. hvilket betyder pro anno (pr. år). Men det betyder ikke, at det er den rente, som vi rent faktisk skal betale.

Hvis en bank skriver 16% p.a. med kvartalsvis rentetilskrivning, så betyder det, at der hvert kvartal bliver lagt 4% til. Dette vil give en effektiv rente på ca 17% (se senere).

Dette kaldes for ÅOP (årlig omkostning i procent). Dette beløb er i regnet renters rente, gebyrer og andre skjulte betalinger for ydelsen. I skal ALTID kigge på ÅOP og IKKE på renten alene….

Eksempelvis

Olsen sætter 3000kr i SUPER-Banken og får 16% p.a. med kvartalsvis rentetilskrivning.

Kvartal 1 står der nu følgende på Olsens konto $3000 \cdot 1.04 = 3120$

Kvartal 2 står der nu følgende på Olsens konto $3120 \cdot 1.04 = 3244.8$

Kvartal 3 står der nu følgende på Olsens konto $3244.8 \cdot 1.04 = 3374.59$

Efter 1 år står der følgende på Olsens konto $3374.59 \cdot 1.04 = 3509.58$

Dette svarer til en stigning på $\frac{3509.58-3000}{3000} \cdot 100 = 16.99\%$.

Desværre får vi bare ALDRIG sådan en god rente på indlån….

Lav opgaver i hæftet

Sætning: Kapitalfremskrivningsformlen

En kapital K_0 der forrentes med en rente p. Vokser på n terminer til:

$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$, hvor $r = \frac{p}{100}$ og kaldes rentefoden

$(1+r)$ kaldes for fremskrivningsfaktoren og her er $r = \frac{p}{100}$

Bevis: (video)

Vi lader en kapital K_0 med en procent p over n terminer

Første gang	$K_1 = K_0 \cdot (1+r)$
Anden gang	$K_2 = K_0 \cdot (1+r) \cdot (1+r)$
Tredje gang	$K_3 = K_0 \cdot (1+r) \cdot (1+r) \cdot (1+r)$
Den n´te gang	$K_n = K_0 \cdot (1+r) \cdot (1+r) \cdot (1+r) \cdot \ldots \cdot (1+r) = K_0 \cdot (1+r)^n$

Hermed bevist.

Eksempel.

Vi låner 5000kr hos F.Idusen til 18% p.a. med månedsvis rentetilskrivning. Hvor meget skylder vi efter blot et år?

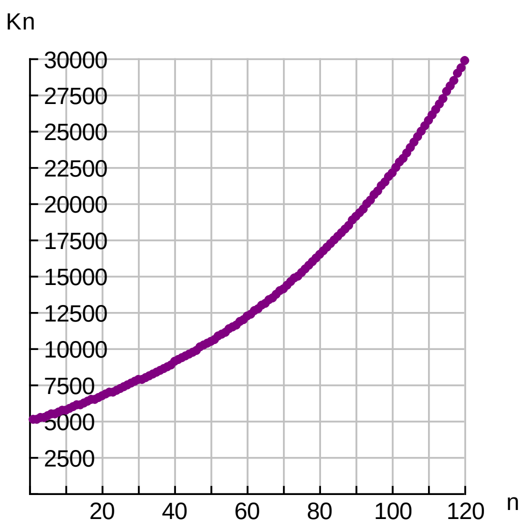
Der er 12 måneder på et år, så $n = 12$, rentefoden (vækstraten) bliver $r = \frac{18/12}{100} = 0.015$

Dermed skylder vi $K_{12} = 5000 \cdot (1+0.015)^{12} = 5000 \cdot 1.015^{12} = 5978.09$

Lav opgaver i hæftet

Men rentesregning handler ikke kun om banker og penge, men om vækst, så ovenstående kan også beskrive en given vækst. Vi skal senere se at eksponentielvækst faktisk er givet som fremskrivningsformlen..

På grafen til højre kan vi se et eksempel på udviklingen i rentes renter. Den viser at 5000kr over 120 terminer vokser til omkring 30000kr……



Sætning: Gennemsnitlig rente/vækst

Den gennemsnitlige rente/vækstrate kan bestemmes ved

$$r_g = \sqrt[n]{(1+r_1)(1+r_2)\cdot \ldots \cdot (1+r_n)} - 1$$

Hvor $r_1, r_2, \ldots\ldots, r_n$ er renterne/væksten de forskellige terminer

Bevis: (video)

Efter n-terminer med variabel rente har vi nu følgende kapital

$$K_n = K_0 \cdot (1+r_1)(1+r_2)\cdot \ldots \cdot (1+r_n)$$

Havde vi brugt en gennemsnitligrente ville det se således ud

$$K_n = K_0 \cdot \left(1+r_g\right)^n$$

Da $K_n = K_n$ får vi at

$$K_0 \cdot \overbrace{\left(1+r_g\right)\left(1+r_g\right)\cdot \ldots \cdot \left(1+r_g\right)}^{\text{n-faktorer}} = K_0 \cdot \overbrace{(1+r_1)(1+r_2)\cdot \ldots \cdot (1+r_n)}^{\text{n-faktorer}}$$

$$K_0 \cdot \left(1+r_g\right)^n = K_0 \cdot (1+r_1)(1+r_2)\cdot \ldots \cdot (1+r_n)$$

$$\left(1+r_g\right)^n = (1+r_1)(1+r_2)\cdot \ldots \cdot (1+r_n)$$

$$1+r_g = \sqrt[n]{(1+r_1)(1+r_2)\cdot \ldots \cdot (1+r_n)}$$

$$r_g = \sqrt[n]{(1+r_1)(1+r_2)\cdot \ldots \cdot (1+r_n)} - 1$$

Hermed bevist

Eksempel

En population af fluer vokser et år med 9%, så falder den med 11% og de sidste to år vokser den med 2% om året. Hvad er den gennemsnitlige vækst?

$$r_g = \sqrt[4]{(1+0.09)(1+(-0.11))(1+0.02)(1+0.02)} - 1 = 0.0023$$

Dette svarer til en vækst på 0.23% pr. år.

Lav opgaver i hæftet

Lån

Vi kommer alle ud for på et tidspunkt at skulle låne nogle penge i banken. Det kunne være vi skulle ud og købe bil, lejlighed eller hus. Her betaler vi ikke det hele tilbage på en gang, men deler det op i små bider (som banken vil være med til). (video)

Der er MANGE forskellige slags lån, men når de skal betales, så er det "ens" for alle. Det vi betaler kaldes ydelsen. Den indeholder så vores egentlige afdrag på lånet og renter for lånet.

$$ydelse = rente + afdrag$$

Det beløb som står tilbage i banken efter en ydelse kaldes for *restgælden*. Det beløb vi starter med at låne kaldes for *hovedstolen*.

Der findes som nævnt mange forskellige lånetyper. Blot for at nævne nogle eksempler:

Fast forrentede (rente ligger fast)

Variabelrente (renter kan varierer)

Afdragsfrie lån (vi betaler kun renter)

Med eller uden renteloft

Lån med afdragsfrihed.

Og så videre……

Men koger vi det hele ned til en basis, så kan vi skelne mellem to lånetyper. Serielån og annuitetslån.

Et par nyttige termer til den videre bearbejdning er

p.a. : Pro Anno og angiver renten på et år.

Termin: Hver termin tillægges der renter. En termin kan være hver måned, kvartal, halv årligt osv. Vigtigst er at den ligger med et fast interval.

ÅOP: Årlig omkostning i procent og er den rente som indeholder ALLE udgifter på et lån. Der er derfor den klart vigtigste at kigge efter ved et lån.

Serielån

Dette er en lånetype, som kræver overblik og en fast styring af sit månedlige budget. Til gengæld er den billigere end annuitetslånet. Det er SJÆLDENT brugt i banken, men er ret almindeligt når private låner penge af hinanden, fordi det et let at beregne afdragets størrelse. (video)

Serielånet har lige store *afdrag* hver termin. Det betyder at efterhånden som restgælden bliver mindre, så falder rentebeløbet og ydelsen bliver derfor mindre og mindre.

Eksempelvis:

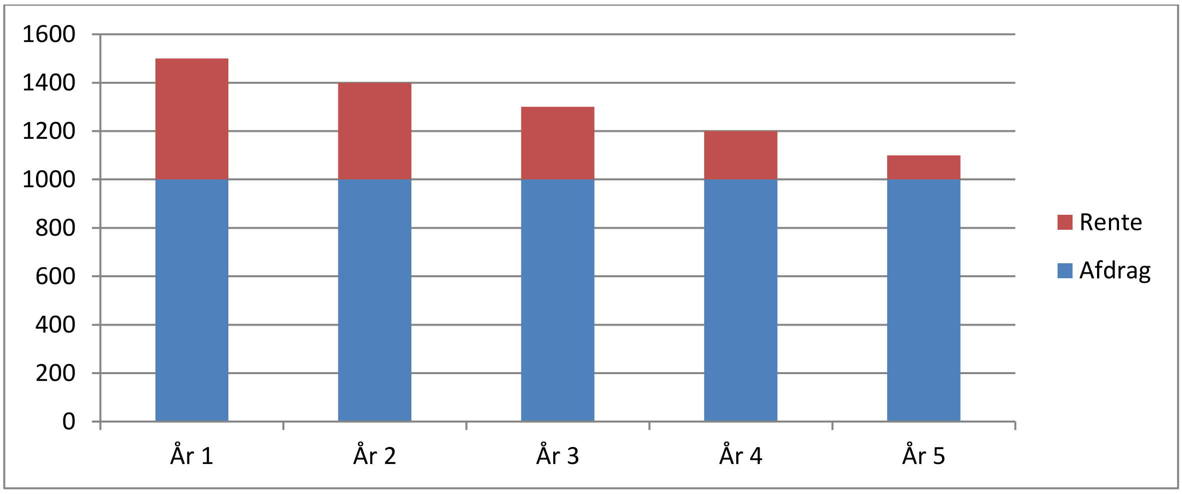
Vi låner 5000kr til et køleskab af svigerfar. Renten er 10% p.a. og vi afdrager 1000kr om året.

Skemaet vil se således ud:

Vi kan bestemme afdraget til $afdrag = \frac{5000}{5} = 1000$

År	Gæld	Rente	Afdrag	Ydelse	Ny restgæld
1	5000	500	1000	1500	4000
2	4000	400	1000	1400	3000
3	3000	300	1000	1300	2000
4	2000	200	1000	1200	1000
5	1000	100	1000	1100	0
Sum		1500	5000		

Vi kan se at det har kostet os 1500kr at låne de 5000kr. Nedefor ser vi det illustreret som diagram.



Lav opgaver i hæftet

Annuitetslån

Er meget udbredt når vi låner penge i banke. Det giver et let overblik over den månedlige økonomi, da ydelsen er fast hver måned, til gengæld er det dyrere på den lange bane. (video)

Annuitetslånet har en fast ydelse, og efter som rentebeløbet er forskelligt fra gang til gang, eftersom vi jo også afdrager på lånet, så er afdragene og forskellige fra gang til gang.

Sætning: Gældsformlen

$$G = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

y er ydelsen, G er vores hovedstol, r er vores rentefod og n vores terminer.

Bevis: (video)

Vi skal se på restgælden umiddelbart efter hver ydelse. Vores udgangspunkt er, at der tilfalder rente før ydelsen. G er hovedstolen og y vores ydelse.

1. termin: $G_1 = G \cdot (1+r) - y$

2. termin: $G_2 = (G \cdot (1+r) - y)(1+r) - y$

$= G \cdot (1+r)^2 - y(1+r) - y$

3. termin: $G_3 = (G \cdot (1+r)^2 - y(1+r) - y)(1+r) - y$

$= G \cdot (1+r)^3 - y(1+r)^2 - y(1+r) - y$

n. termin: $G_n = G(1+r)^n - y(1+r)^{n-1} - y(1+r)^{n-2} - \ldots - y(1+r)^2 - y(1+r) - y$

Efter n terminer er vores lån betalt tilbage og derfor må $G_n = 0$

Dette giver os nu

$$0 = G(1+r)^n - y(1+r)^{n-1} - y(1+r)^{n-2} - \ldots - y(1+r)^2 - y(1+r) - y$$

Vi isolerer nu $G(1+r)^n$ og kalder ligningen for (1)

$$y(1+r)^{n-1} + y(1+r)^{n-2} + \ldots + y(1+r)^2 + y(1+r) + y = G(1+r)^n$$

Vi ganger derefter igennem med fremskrivningsfaktoren $(1+r)$, og kalder denne for (2)

$$(y(1+r)^{n-1} + y(1+r)^{n-2} + \ldots + y(1+r)^2 + y(1+r) + y)(1+r) = G(1+r)^n(1+r)$$

$$y(1+r)^n + y(1+r)^{n-1} + \ldots + y(1+r)^3 + y(1+r)^2 + y(1+r) = G(1+r)^n(1+r)$$

Nu trækker vi (1) fra (2) fordi det er skide smart ☺

$$G(1+r)^n(1+r)-G(1+r)^n$$
$$=y(1+r)^n+y(1+r)^{n-1}+\cdots+y(1+r)^3+y(1+r)^2+y(1+r)$$
$$-(y(1+r)^{n-1}+y(1+r)^{n-2}+\ldots+y(1+r)^2+y(1+r)+y)$$

$$G(1+r)^n+G(1+r)^n\cdot r-G(1+r)^n$$
$$=y(1+r)^n+y(1+r)^{n-1}+\cdots+y(1+r)^3+y(1+r)^2+y(1+r)$$
$$-y(1+r)^{n-1}-y(1+r)^{n-2}-\ldots-y(1+r)^2-y(1+r)-y$$

Når vi så har forkortet så mange led væk som muligt får vi

$$G(1+r)^n\cdot r=y(1+r)^n-y$$

$$G(1+r)^n\cdot r=y((1+r)^n-1)$$

$$G=\frac{y((1+r)^n-1)}{(1+r)^n\cdot r}=y\cdot\frac{(1+r)^n-1}{(1+r)^n\cdot r}=y.\left(\frac{(1+r)^n}{(1+r)^n\cdot r}-\frac{1}{(1+r)^n\cdot r}\right)$$
$$=y.\left(\frac{(1+r)^n}{(1+r)^n\cdot r}-\frac{1}{(1+r)^n}\cdot\frac{1}{r}\right)=y.\left(\frac{(1+r)^n}{(1+r)^n\cdot r}-\frac{(1+r)^{-n}}{1}\cdot\frac{1}{r}\right)$$
$$=y\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{(1+r)^{-n}}{r}\right)=y\cdot\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

Hermed bevist

<u>Eksempelvis:</u>

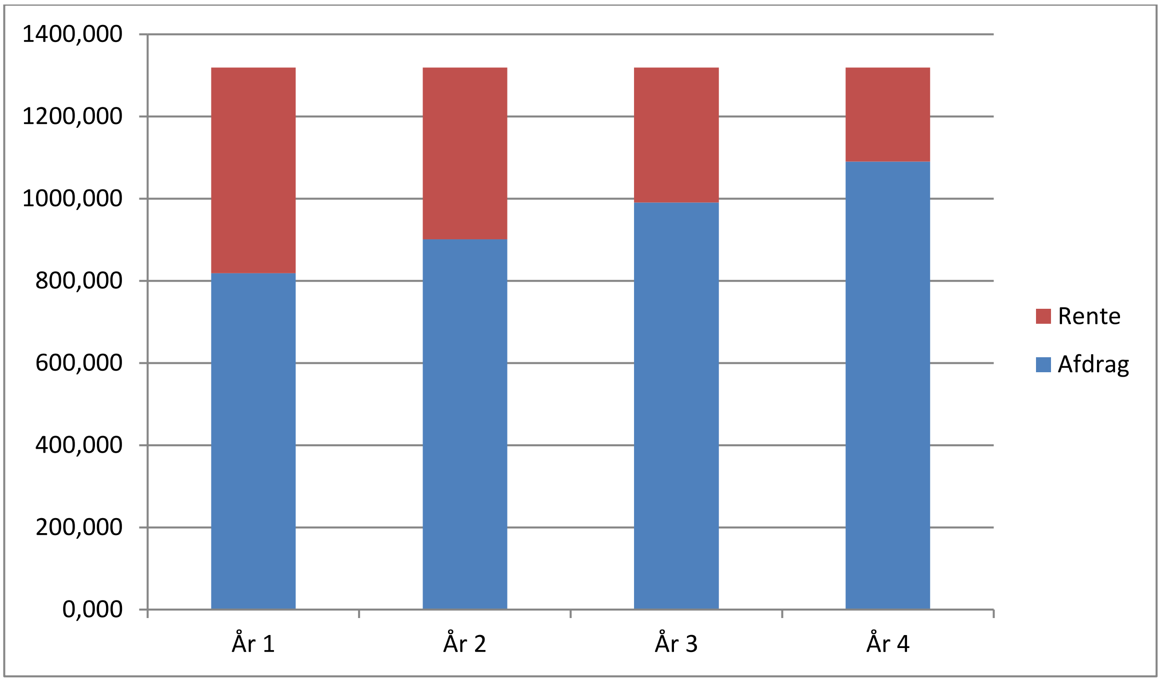
Vi låner 5000kr til et køleskab af Ruin Banken. Renten er 10% p.a. og der er årlig rentetilskrivning.

Skemaet ser således ud:

Ydelsen bestemmes til $y=5000\cdot\frac{0.1}{1-(1+0.1)^{-5}}=1318.987$

Herefter kan afdragene bestemmes ved $afdrag=ydelse-rente$

	Restgæld	Rente	Afdrag	Ydelse	Ny restgæld
År 1	5000,000	500,000	818,987	1318,987	4181,013
År 2	4181,013	418,101	900,886	1318,987	3280,127
År 3	3280,127	328,013	990,974	1318,987	2289,153
År 4	2289,153	228,915	1090,072	1318,987	1199,081
År 5	1199,081	119,908	1199,079	1318,987	0,002
Sum		1594,937466	4999,997534		



Samlet set koster det os ca. 1595kr at låne de 5000kr i banken

Lav opgaver i [hæftet]

Hvis vi omvendt kan betale 1400kr til en ny bil hver måned og renten er 6% p.a. med månedlig rentetilskrivning. Vi kan kun betale dette beløb de næste 2 år. Hvor stort et beløb kan vi så låne?

Hertil benytter vi blot gældsformlen igen.

$$G = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

Dette vil give os følgende beløb at låne for.

$$G = 1400 \cdot \frac{1-(1+0.005)^{-24}}{0.005} = 31588$$

Prøv at kigge på "Beregning af grundlån.xls", hentes HER. Her er der lavet et skema, som viser forskellen mellem et serielån og et annuitetslån. I kan selv indtaste de relevante oplysninger og se forskellene.

Som slut kommentar kan nævnet, at de selv flexlån med variabel rente har formen "annuitetslån", da den i princippet bestemmer en ny ydelse hver gang rente ændre sig.

Annuitetsopsparing/annuitetslån

Vi har nu behandlet diverse låne og opsparingstyper, hvor vi har lånt ét beløb eller sat ét beløb ind, men hvordan ser det ud hvis vi sparer op over flere gange, eller låner over flere gange (eksempelvis SU lån). (video)

Overordnet set er det samme princip om vi sætter penge ind fast eller får penge udbetalt fast. Det ene opbygger blot en positiv kapital og den anden opbygger en negativ kapital (gæld).

Sætning: Annuitetsformlen

Hvis man indbetaler/låner det samme hver termin, så vil den samlede opsparing/gæld kunne beregnes ved

$$K_n = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Hvor K_n er vores slut kapital/opsparing, b er vores beløb pr. termin, r er rentefoden og n er antal terminer.

Bevis: (video)

Vi skal se på saldoen umiddelbart efter hver indbetaling. Vores udgangspunkt er, at der først tilfalder rente efter indbetalingen og før den næste finder sted.

1. indbetaling: $K_1 = b$

2. indbetaling: $K_2 = b(1+r) + b$

3. indbetaling: $K_3 = (b(1+r) + b)(1+r) + b$

$$= b(1+r)^2 + b(1+r) + b$$

……..

n. indbetaling $K_n = b(1+r)^{n-1} + b(1+r)^{n-2} + \cdots + b(1+r)^3 + b(1+r)^2 + b(1+r) + b$

Denne sidste ligning kalder vi (1).

Nu ganger vi (1) med fremskrivningsfaktoren $(1+r)$, og kalder den nye ligning for (2)

$$K_n(1+r) = (b(1+r)^{n-1} + b(1+r)^{n-2} + \cdots + b(1+r)^2 + b(1+r) + b)(1+r)$$

$$K_n(1+r) = b(1+r)^n + b(1+r)^{n-1} + \cdots + b(1+r)^3 + b(1+r)^2 + b(1+r)$$

Nu trækker vi (1) fra (2), af den simple årsag at det er smart ☺

$$K_n(1+r) - K_n$$
$$= b(1+r)^n + b(1+r)^{n-1} + \cdots + b(1+r)^3 + b(1+r)^2 + b(1+r)$$
$$- \left(b(1+r)^{n-1} + b(1+r)^{n-2} + \cdots + b(1+r)^3 + b(1+r)^2 + b(1+r) + b\right)$$

Når vi har ryddet ud i leddene får vi tilbage

$$K_n(1+r) - K_n = b(1+r)^n - b$$

$$K_n + K_n \cdot r - K_n = b((1+r)^n - 1)$$

$$K_n \cdot r = b((1+r)^n - 1)$$

$$K_n = \frac{b((1+r)^n - 1)}{r}$$

$$K_n = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Hermed bevist

Eksempelvis:

Vi ønsker at optage et SU-lån til 4% p.a. med månedlig rentetilskrivning. Beløbet udbetalt hver måned er 2807kr (hentet fra http://www.su.dk/SULaan/satser/Sider/default.aspx)

Efter 2 år har vi fået udbetalt $2807kr \cdot 24 = 67368$kr, men hvor stor er vores gæld

$$K = 2807kr \cdot \frac{\left(1 + \frac{\frac{4}{12}}{100}\right)^{24} - 1}{\frac{\frac{4}{12}}{100}} \approx 70014kr$$

Hvilket giver os en ”ubetydelig” renteudgift på 2646kr. MEN gælden skal jo så efterfølgende afvikles som et annuitetslån til 2% p.a. med kvartalsvis rentetilskrivning (betales pr. kvartal).

Vi kan afregne 2000kr pr. kvartal til det er afsluttet. Vi kan her finde endelige antal terminer ved at løse $70014kr = 2000kr \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{\frac{2}{4}}{100}\right)^{-n}}{\frac{\frac{2}{4}}{100}}$, hvilket giver $n \approx 38.6$

Samlet set skal vi altså betale $2000kr \cdot 38.6 = 77200$kr. tilbage. Vi kommer altså til at betale ca. 7186kr i renter for tilbagebetalingen. OG det tager os $\frac{38.6}{4} = 9.65år$!!!!!

Samlet set betyder det, at det koster os $2646kr + 7186kr = 9832kr$ at låne 67368kr, og vi hænger på gælden i MANGE år……. Tænk lidt over den ☺.