

Tidligere handlede ligningsløsning om, at finde en eventuel værdi (oftest et reelt tal), som opfyldte ligningen. Nu skal vi finde en funktion, som opfylder ligningen.

Tak til Anne Grethe Mølgaard for inspiration og hjælp.

Differentialligninger

Henrik S. Hansen, Sct. Knuds
Gymnasium

Version 5.1



Opgaver til noterne kan
findes her. [PDF](#)

Facit til opgaver til noterne
kan findes her. [PDF](#)

Indhold

Differentialligninger.....	1
Linjeelementer	3
Vigtig information fra differentialligningen	4
Tangenten til løsningskurven gennem et givent punkt	4
Monotoniforhold	4
Løsning af differentialligninger	5
Løsning ved stamfunktion.....	6
Sætning: Stamfunktion.....	6
Separation af variable.....	7
Sætning: Separation af variable	8
Den lineære differentialligning	10
Sætning: Lineær differentialligning	10
Den logistiske ligning	13
Sætning: Den logistiske ligning 1	14
Sætning: Den logistiske ligning 2	14
Egenskaber ved den logistiske vækst.....	17

Differentialligninger

I dette hæfte skal vi beskæftige os med differentialligninger. I modsætning til almindelige ligninger, hvis løsninger oftest er tal, så er differentialligninger, ligninger som indeholder både den afledte (y' eller blot $\frac{dy}{dx}$)- og funktionen selv, og hvor man skal finde en funktion, som løsning. Den ubekendte i denne ligning er altså funktionen $f(x)$ (eller y , om man vil). ([video](#))

Et eksempel er logistisk vækst, som eksempelvis fremkommer i populationer, hvor der ikke længere er optimale levevilkår længere.

For at simplificere dette, så lad os kigge på ynglende kaniner.

Sætter vi kaniner løs i naturen vil de i starten yngle eksponentielt, og væksthastighed vil derfor være givet ved følgende, hvor y er antallet af kaniner og x er tiden.

$$\frac{dy}{dx}$$

Det er nærliggende at tænke, at væksthastigheden er proportional med antallet af kaniner. Hvis vi tænker os, at der er dobbelt så mange kaniner, så må der være dobbelt så mange, som yngler osv. Se eventuelt "Fra kaniner til differentialligninger.pdf" ved at [klikke her](#).

Dette skrives som

$$\frac{dy}{dx} = k \cdot y$$

Hvor k er proportionalitetsfaktoren, der fortæller, hvor hurtigt væksten foregår.

Da $y \neq 0$, må der gælde, at den relative væksthastighed (væksten i forhold til populationen) er

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = k$$

Men denne vækst fortsætter ikke. I stedet for en konstant prøver vi med en aftagende lineær funktion, som viser, at den relative vækst vil falde lineært i takt med antallet y .

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = b - ay$$

Denne omskrives nu lidt

$$\frac{dy}{dx} = y(b - ay)$$

$$\frac{dy}{dx} = ya \left(\frac{b}{a} - y \right)$$

Kaniners vækst kan altså opstilles som en såkaldt logistisk differentialligning, som vi ser nærmere på senere.

Men hvordan løser vi så differentialligninger:

Eksempelvis:

$$\frac{dy}{dx} = 2y \text{ eller skrevet anden notation } f'(x) = 2 \cdot f(x)$$

Vi skal altså finde en funktion eller flere, som opfylder at når vi differentierer den, så er resultatet det samme som 2 gange funktionen selv.

En løsning kunne være en af funktionerne

$$f_1(x) = e^{2x}, f_2(x) = -6e^{2x} \text{ eller } f_3(x) = -3e^{2x+2} \text{ eller.....}$$

En måde at teste løsningerne er ved at indsætte dem i ligningen og se om ligningen passer.

Eksempelvis:

Eftervis, at $f(x) = e^{3x-2}$ opfylder differentialligningen $\frac{dy}{dx} = 3y$. (typisk form for UHM)

Jeg indsætter nu den givne funktion i ligningen og ser om den passer

$$(e^{3x-2})' = 3(e^{3x-2})$$

$$(3x - 2)' \cdot e^{3x-2} = 3e^{3x-2}$$

$$3e^{3x-2} = 3e^{3x-2}$$

$$0 = 0$$

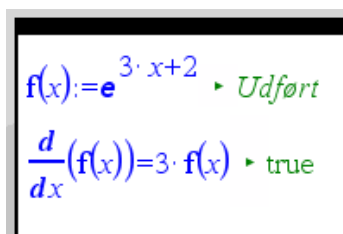
Altså er $f(x)$ en løsning til den givne differentialligning.

- ja, faktisk enhver funktion af formen $f(x) = c \cdot e^{3x+k}$ vil opfylde vores differentialligning i ovenstående. Denne kaldes for den **fuldstændige løsning** til differentialligningen.

Her er tallet c og k konstanter - oftest kaldes disse for en *integrationskonstanter*. Sådanne konstanter optræder næsten altid i differentialligningers løsninger. Man taler om den *generelle/fuldstændige løsning* til differentialligningen.

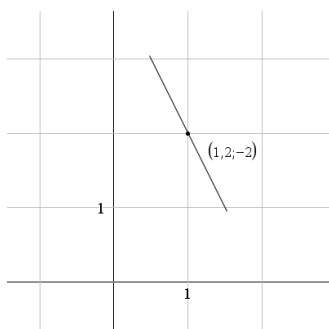
I Nspire kunne dette let løses ved

Da Nspire skriver "true" så er det sandt.


$$f(x) := e^{3 \cdot x + 2} \rightarrow \text{Udført}$$
$$\frac{d}{dx}(f(x)) = 3 \cdot f(x) \rightarrow \text{true}$$

Lav opgaver i [hæftet](#)

Linjeelementer



Til at illustrere løsningerne til differentialligninger, kan vi benytte os af *linjeelementer*. Hvis vi husker på, at $f'(x)$ er hældningen på tangenten til grafen til tiden x for funktionen $f(x)$, så giver begrebet linjeelement mere mening. ([video](#))

På billedet til venstre ses et eksempel på et linjeelement i punktet $(1, 2)$. Hældningen på elementet er -2

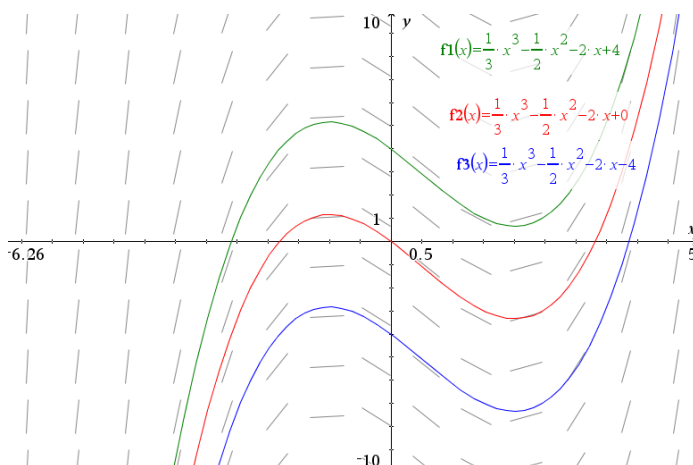
Vi kunne kigge på $\frac{dy}{dx} = x^2 - x - 2$. Fra vores viden om integralregning, kan vi her bestemme vores funktion til $f(x) = y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + c$, hvor c er en konstant, men hvordan forløber de?

Hvis vi for hver x -værdi beregner $\frac{dy}{dx}$, så kan vi tegne små bider af tangenten i det pågældende punkt.

Eks. hvis vi indsætter $x = 1$, så fås at $\frac{dy}{dx} = x^2 - x - 2 = 1^2 - 1 - 2 = -2$

Nu tegner vi i punktet $(1, y)$ en lille streg med hældningen -2 . Læg mærke til at uanset valg af y , så er hældningen den samme (i dette tilfælde). Overvej hvorfor.

Et sådan linjeelement skrives som $(x_0, y_0; f'(x_0))$. I punktet $(1, 3)$ vil linjeelementet hedde $(1, 3; -2)$.

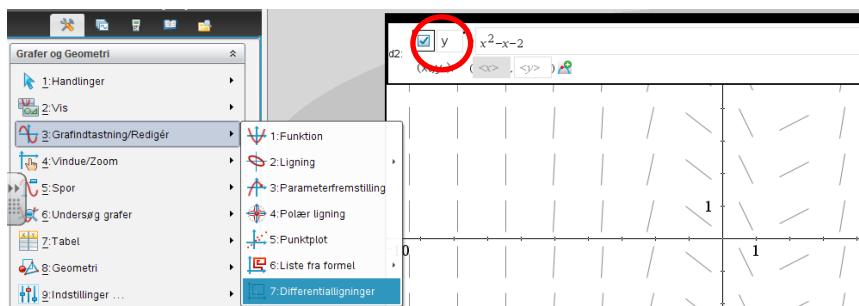


På denne måde kan vi udfylde hele vores koordinatsystem. Se figuren til højre

Nu kan vi danne os et indtryk af *løsningskurvens* forløb. Vi kan se tre eksempler på løsningskurver, der er tegnet op, og vi kan se, at der er mange flere. Læg mærke til at den eneste forskel på kurverne er konstanten. Den **fuldstændige løsning** er altså $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + c$.

I Nspire kan linjeelementer tegnes som vist på billedet.

Husk at ændre til y (i den røde cirkel). Eller kald eventuelle y på højreside for eks. y_1 .



Lav opgaver i [hæftet](#)

Vigtig information fra differentialligningen

I mange tilfælde kan man trække værdifuld information ud af den differentialligning uden at løse den. Dette hænger sammen med, at $\frac{dy}{dx}$ er et udtryk for hældningen på tangenten til y , eller et udtryk for væksthastigheden til en konkret funktionsværdi.

Tangenten til løsningskurven gennem et givent punkt

Vi kan i mange tilfælde nemt bestemme en tangent til løsningskurven, hvis blot vi får oplyst et punkt som kurven går gennem. ([video](#))

Eksempelvis:

Betragt differentialligningen $\frac{dy}{dx} = \frac{y \cdot x}{y-2}, y > 2$.

Bestem ligningen for tangenten til grafen y i punktet $P(1,3)$

Ligningen for tangenten er $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Da $f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$ så kan vi nemt bestemme differentialkvotienten til $f'(1) = \frac{3 \cdot 1}{3-2} = 3$

Nu kan vi opskrive forskriften $t(x) = 3(x - 1) + 3 = 3x$

Lav opgaver i [hæftet](#)

Monotoniforhold

Hvis en funktion er fastlagt ved en differentialligning, kan vi i nogle tilfælde udtale os om monotoniforholdene uden at løse ligningen. ([video](#))

Eksempelvis:

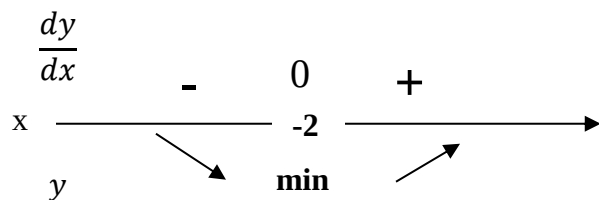
$$\frac{dy}{dx} = (x + 2)(y - 3), \quad x \in \mathbb{R} \text{ og } y > 3$$

Monotoniforholdene er fastlagt ved fortegnene af $\frac{dy}{dx}$.

$y > 3$ sikrer os at $(y - 3) > 0$.

Derfor har $\frac{dy}{dx}$ samme fortegn som $(x + 2)$. Løser $x + 2 = 0, x = -2$

Da hvis $x = -10$ så er $(-10 + 2) = -8$, hvis $x = 10$ så er $(10 + 2) = 12$. Dermed bliver vores fortegnslinje

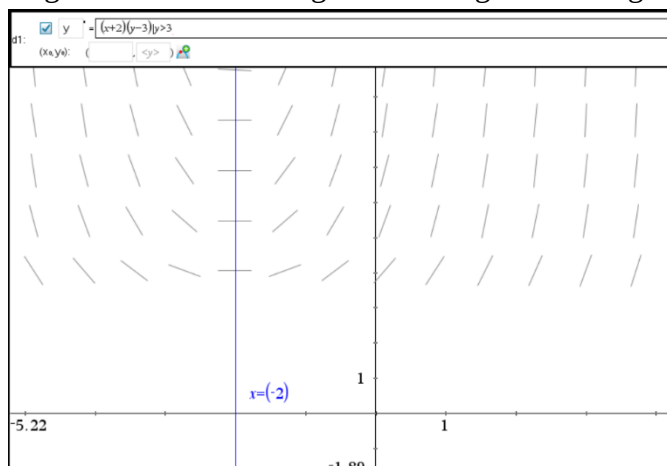


y er dermed aftagende på intervallet $] -\infty; -2]$

y er dermed voksende på intervallet $[-2; \infty[$

y har et globalt minimum i $x = -2$

I Nspire kunne det se således ud. Det er her tydeligt at se af væksthastigheden er negativ så længe x er mindre end -2 positiv for x større end -2



Lav opgaver i [hæftet](#)

Løsning af differentiaalligninger

Afhængig af udtrykket for vores differentiaalligning, så er der forskellige måder at løse disse på. Vi vil nu introducere nogle af løsningsformlerne. Vi vil kigge på:

- Løsning ved stamfunktion
- Separation af variable
- Lineær differentiaalligning
- Den logistiske ligning

Hvilken type af løsning, vi vælger, afhænger af udtrykket for vores given differentiaalligning. Når vi løser en differentiaalligning uden at få angivet et punkt/betingelse til ligningen, så kaldes denne for den fuldstændige løsning.

Løsning ved stamfunktion

Vi så tidligere at en fuldstændig løsning til $\frac{dy}{dx} = x^2 - x - 2$ var $f(x) = y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + c$, da hvis vi indsætter $f(x)$ i differentiaalligningen, så passer den. ([video](#))

Sætning: Stamfunktion

En differentiaalligning af typen

$$\frac{dy}{dx} = g(x)$$

har for enhver kontinuert funktion g den fuldstændige løsning:

$$y = \int g(x) dx + c$$

Bevis: ([video](#))

Forudsætningen at g er kontinuert sikrer, at der eksisterer en stamfunktion, da vi ved at enhver kontinuert funktion har en stamfunktion. Dermed får vi iflg. definitionen på stamfunktion

$$y = \int g(x) dx + c$$

Hermed bevist

Eksempelvis:

Bestem løsningen til differentiaalligningen $\frac{dy}{dx} = x^3$, hvis graf går gennem $P(2,1)$

Vi starter med at bestemme den fuldstændige løsning til y

$$y = \int x^3 dx + c = \frac{1}{4}x^4 + c$$

Nu kan vi så finde vores konstant c ved at benytte vores viden om gennemløbspunkt.

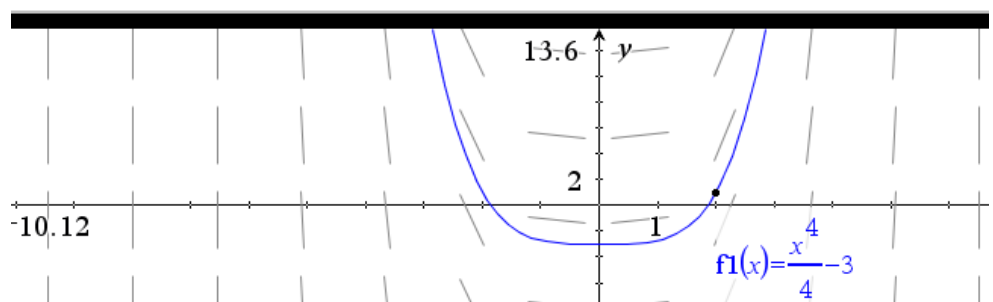
$$1 = \frac{1}{4}2^4 + c, \text{ altså vil} \\ -3 = c$$

$$\text{deSolve}(y'=x^3 \text{ and } y(2)=1, x, y) \rightarrow y = \frac{x^4}{4} - 3$$

Den løsningen er fundet til

$$y = \frac{1}{4}x^4 - 3$$

I Nspire kunne vi gøre det ved



Lav opgaver i [hæftet](#)

Separation af variable

Separation af variable går ud på at adskille de variable -med andre ord at samle x på den ene side og y på den anden. ([video](#))

Som inspiration benytter vi følgende fremgangsmåde, som er inspireret af Leibniz:

Hvis vi kigger på udtrykket

$$y' = \frac{2x}{y}$$

Så kan dette skrives som

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$$

Vi lader som om, dy og dx er talstørrelser

$$ydy = 2xdx$$

For at komme af med dy og dx , så integrerer vi, og husker at den eneste forskel på de to sider da vil være en konstant.

$$\int ydy = \int 2xdx + c$$

$$\frac{1}{2}y^2 = x^2 + c$$

$$y^2 = 2x^2 + 2c$$

Hvis vi så får af vide at løsningskurven løber igennem punktet $P(3,8)$, så kan vi bestemme hvad c skal være.

$$8^2 = 2 \cdot 3^2 + 2c$$

$$\frac{64 - 18}{2} = 23 = c$$

Så nu har vi følgende

$$y^2 = 2x^2 + 2 \cdot 23 = 2x^2 + 46$$

$$y = \pm\sqrt{2x^2 + 46}$$

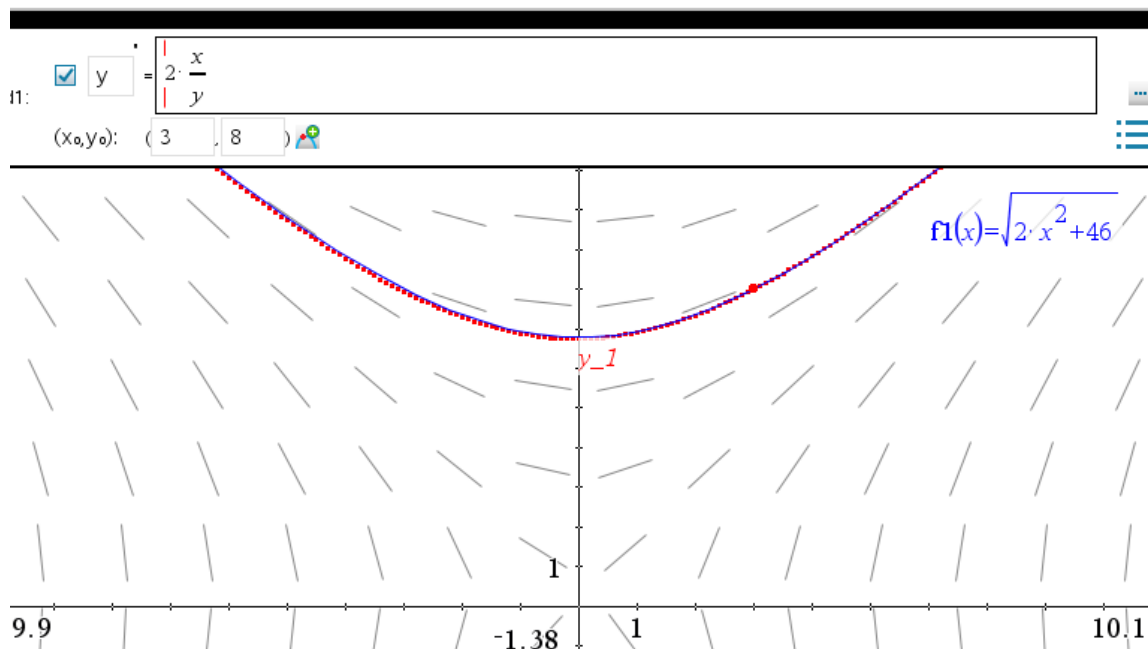
Da y -værdien 8 er positiv, er løsningen derfor

$$y = \sqrt{2x^2 + 46}$$

og da $2x^2 + 46$ er positiv uanset valg af x , så er definitionsmængden alle reelle tal. Der er altså ingen forbehold at tage.

I Nspire kan vi det således. I den øverste del bestemmer jeg løsningen analytisk og nederst ser vi løsningen grafisk og at den passer med den analytiske.

`solve(deSolve(y'=2· $\frac{x}{y}$  and y(3)=8,x,y)|y>0 ▶  $y=\sqrt{2\cdot(x^2+23)}$ )`



Lav opgaver i [hæftet](#)

Når vi så skal kigge lidt mere håndfast (og matematisk korrekt) på teorien bagved, har vi følgende sætning.

Sætning: Separation af variable

Vi betragter en differentiaalligning af typen

$$\frac{dy}{dx} = g(y) \cdot h(x)$$

Hvis $h(x)$ er kontinuert i et interval I på førsteaksen og $g(y)$ er kontinuert i et interval J på andenaksen, samt at $g(y) \neq 0$, så har differentiaalligningen de samme løsninger som

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx + c$$

Bevis:

Vi tager udgangspunkt i differentiaalligningen

$$\frac{dy}{dx} = g(y) \cdot h(x)$$

Da $g(y) \neq 0$ må vi dividere med den på begge sider eller blot gange med $\frac{1}{g(y)}$

$$\frac{1}{g(y)} \cdot \frac{dy}{dx} = h(x)$$

Vi ser på en løsning $y = f(x)$ og dermed den afledt $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

Det indsættes i differentialligningen

$$\frac{1}{g(f(x))} \cdot f'(x) = h(x)$$

Da $h(x)$ er kontinuert, har den en stamfunktion, og da de to funktioner på hhv. højre og venstresiden er ens, er deres stamfunktioner også ens, så den eneste forskel på den ene stamfunktion og den anden er en konstant c

$$\int \frac{1}{g(f(x))} \cdot f'(x) dx = \int h(x) dx + c$$

Hvis vi så omskriver venstre siden ved integration ved substitution, da fås

$$y = f(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x)} dy = dx$$

Indsat fås

$$\int \frac{1}{g(f(x))} \cdot f'(x) dx = \int \frac{1}{g(y)} \cdot f'(x) \cdot \frac{1}{f'(x)} dy = \int \frac{1}{g(y)} dy$$

Samlet gav det os at

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx + c$$

Hermed bevist

I eksemplet med $y' = \frac{2x}{y}$ ville vi få at $g(y) = \frac{1}{y}$ og $h(x) = 2x$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 2x dx + c$$

$$\int y dy = \int 2x dx + c$$

$$\frac{1}{2}y^2 = x^2 + c$$

Nu isolerer vi y

$$y^2 = 2x^2 + 2c$$

$$y = \pm\sqrt{2x^2 + 2c}$$

Lav opgaver i [hæftet](#)

Den lineære differentialligning

Den lineære differentialligning er af typen $\frac{dy}{dx} + h(x) \cdot y = g(x)$. Det karakteristiske ved disse ligninger er, at den afledede y' afhænger lineært af y i den forstand, at koefficienterne er funktioner af x (og ikke konstanter som i lineære funktioner). ([video](#))

Sætning: Lineær differentialligning

Vi betragter en lineær differentialligning

$$\frac{dy}{dx} + h(x) \cdot y = g(x)$$

hvor h og g er kontinuerte funktioner

Den fuldstændige løsning til denne ligning er

$$y = e^{-H(x)} \cdot \int e^{H(x)} \cdot g(x) dx + c \cdot e^{-H(x)}$$

hvor $H(x) = \int h(x) dx + k$ er en vilkårlig stamfunktion til h(x)

Bevis: ([video](#))

Vi tager udgangspunkt i differentialligningen

$$y' + h(x) \cdot y = g(x)$$

Så får vi den idé at gange med en (foreløbig uspecificeret) kontinuert funktion $w(x) \neq 0$ på begge sider af lighedstegnet

$$w(x) \cdot (y' + h(x) \cdot y) = w(x) \cdot g(x)$$

og ganger ind i parentesen

$$w(x) \cdot y' + w(x) \cdot h(x) \cdot y = w(x) \cdot g(x)$$

Hvis vi nu kan vælge funktionen $w(x)$, så $w'(x) = w(x) \cdot h(x)$ vil vi have

$$w(x) \cdot y' + w'(x) \cdot y = w(x) \cdot g(x)$$

ifølge produktreglen vil $(w(x) \cdot y)' = w(x) \cdot y' + w'(x) \cdot y$, hvilket kan hjælpe os videre.

Jagten på funktionen w , sådan at $w(x) \neq 0$ og $w'(x) = w(x) \cdot h(x)$ går ind:

Idet vi ved, at

- $h(x)$ er kontinuert, så den har en stamfunktion $H(x)$
- den naturlige eksponentialfunktion (e^x) har den egenskab, at den afledede er funktionen selv
- differentiation af en sammensat funktion giver et produkt af de afledede af hhv. den indre og den ydre funktion

kunne det være umagen værd at undersøge funktionen $w(x) = e^{H(x)}$

$$w'(x) = (e^{H(x)})' = H'(x) \cdot e^{H(x)} = e^{H(x)} \cdot h(x)$$

Idet vi satte $w(x) = e^{H(x)}$ får vi

$$w'(x) = w(x) \cdot h(x)$$

Da eksponentialfunktionen er positiv, er betingelsen $w(x) \neq 0$ også opfyldt.

Vi har nu altså fundet en funktion, der opfylder de ønskede betingelser, og fortsætter så, hvor vi slap

$$w(x) \cdot y' + w(x) \cdot h(x) \cdot y = w(x) \cdot g(x)$$

vi udnytter, at $w(x) \cdot h(x)$ kan erstattes af $w'(x)$

$$w(x) \cdot y' + w'(x) \cdot y = w(x) \cdot g(x)$$

og anvender produktreglen

$$(w(x) \cdot y)' = w(x) \cdot g(x)$$

$w(x) \cdot y$ er altså en stamfunktion til $w(x) \cdot g(x)$

$$w(x) \cdot y = \int w(x) \cdot g(x) dx + c$$

Da $w(x) \neq 0$, kan vi dividere med den på begge sider, og får dermed y

$$y = \frac{1}{w(x)} \cdot \left(\int w(x) \cdot g(x) dx + c \right)$$

Vi indsætter nu forskriften for $w(x) = e^{H(x)}$ og udnytter, at $\frac{1}{w(x)} = \frac{1}{e^{H(x)}} = e^{-H(x)}$ iflg. det udvidede potensbegreb. Dermed fås den fuldstændige løsning

$$y = e^{-H(x)} \cdot \left(\int e^{H(x)} \cdot g(x) dx + c \right)$$

eller ved at gange ind i parentesen

$$y = e^{-H(x)} \cdot \int e^{H(x)} \cdot g(x) dx + c \cdot e^{-H(x)}$$

Hermed bevist.

Eksempelvis:

Bestem den løsning til differentialligningen $y' + 2 \cdot x \cdot y = 4 \cdot x \cdot e^{x^2}$, hvis graf går gennem punktet $P(0,3)$.

Dette er en lineær differentialligning på formen $\frac{dy}{dx} + h(x) \cdot y = g(x)$, med

$h(x) = 2x$, hvilket giver os $H(x) = x^2$ og $g(x) = 4 \cdot x \cdot e^{x^2}$

Vi kan nu bestemme den fuldstændige løsning:

$$y = e^{-H(x)} \cdot \int e^{H(x)} \cdot g(x) dx + c \cdot e^{-H(x)}$$

$$y = e^{-x^2} \cdot \int e^{x^2} \cdot 4x \cdot e^{x^2} dx + c \cdot e^{-x^2}$$

Ved brug af potensregnereglerne fås

$$y = e^{-x^2} \cdot \int 4x \cdot e^{2x^2} dx + c \cdot e^{-x^2}$$

Ved integration ved substitution med $t = 2x^2$ og dermed $\frac{dt}{dx} = 4x$, fås $\frac{dt}{4x} = dx$

$$y = e^{-x^2} \cdot \int 4x \cdot e^t \frac{dt}{4x} + c \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2} \cdot \int e^t dt + c \cdot e^{-x^2}$$

$$y = e^{-x^2} \cdot e^t + c \cdot e^{-x^2}$$

ved indsættelse af $t = 2x^2$

$$y = e^{-x^2} \cdot e^{2x^2} + c \cdot e^{-x^2}$$

og endelig ved brug af potensregnereglerne har vi den fuldstændige løsning til

$$y = e^{x^2} + c \cdot e^{-x^2}$$

For at bestemme c , benytter vi vores punkt $P(0,3)$

$$3 = e^0 + c \cdot e^{-0} = 1 + c \cdot 1$$

$$c = 2$$

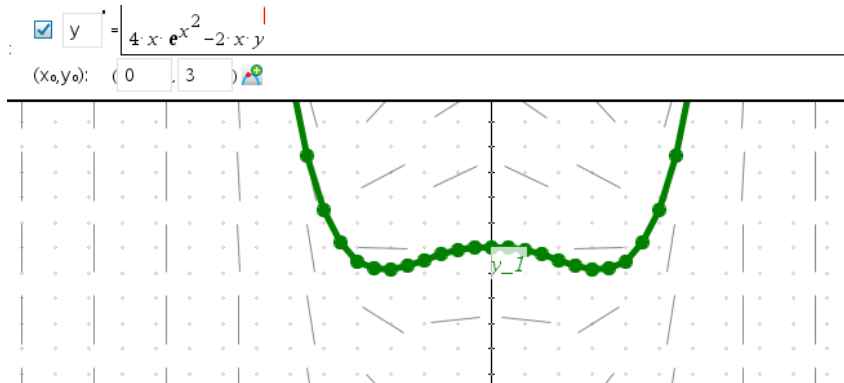
Nu kan vi opstille løsningen til opgaven til

$$y = e^{x^2} + 2 \cdot e^{-x^2}$$

I Nspire kan laves ved kommandoen

$$\text{expand}\left(\text{desolve}(y' + 2 \cdot x \cdot y = 4 \cdot x \cdot e^{x^2} \text{ and } y(0) = 3, x, y)\right) \rightarrow y = e^{x^2} + \frac{2}{e^{x^2}}$$

En grafisk løsning ville se således ud



Lav opgaver i [hæftet](#)

Den logistiske ligning

Hvis en population har ubegrænset adgang til føde og ingen dødelighed, vil dens væksthastighed være proportional med populationens størrelse, og væksten vil være eksponentiel, men en sådan ubegrænset vækst er ikke realistisk. Så væksten vil på et tidspunkt begynde at "gå i stå". ([video](#))

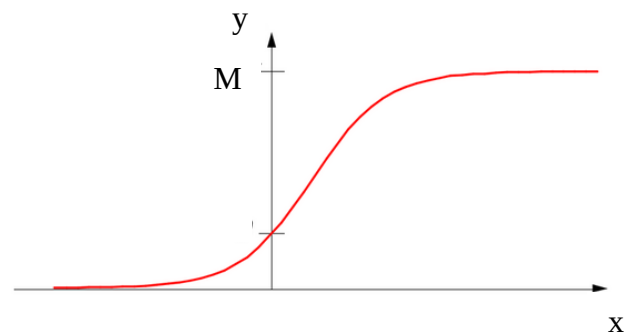
Den logistiske vækstmodel tager højde for, at omgivelserne indvirker på væksten, så væksthastigheden aftager, når

populationsstørrelsen nærmer sig en øvre grænse M også kaldet *bæreevnen*. Modellen kan formuleres som differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = ay(M - y)$$

hvor y er størrelsen af populationen, x er tiden, og a (*den indre vækstrate*) et mål for, hvor hurtigt populationen når sin øvre grænse. Denne *logistiske ligning* blev først indført af den belgiske statistiker P.F. Verhulst (1804-49).

Somme tider ses differentialligningen også som



$$\frac{dy}{dx} = y(b - ay)$$

Sætning: Den logistiske ligning 1

Den logistiske ligning

$$\frac{dy}{dx} = ay(M - y)$$

har for $0 < y < M$ løsningerne

$$y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}}$$

hvor c er en positiv konstant.

Men som nævnt så ses ligningen også til tider som $\frac{dy}{dx} = y(b - ay)$.

Den eneste forskel er at $M = \frac{b}{a}$.

Sætning: Den logistiske ligning 2

Den logistiske ligning

$$\frac{dy}{dx} = y(b - ay)$$

har for $0 < y < \frac{b}{a}$ løsningerne

$$y = \frac{\frac{b}{a}}{1 + c \cdot e^{-b \cdot x}}$$

hvor c er en positiv konstant.

Bevis:

Antag at $y(x)$ er en løsning til $\frac{dy}{dx} = y(b - ay)$. Vi skal så bare vise at $y = \frac{\frac{b}{a}}{1 + c \cdot e^{-b \cdot x}}$

Vi får en god ide, lad $z = \frac{1}{y}$, altså at $(z(x) = \frac{1}{y(x)})$. Der gælder altså at z er en sammensat funktion, hvor $\frac{1}{x}$ er den ydre og y er den indre.

Da bliver $z' = \left(\frac{1}{y}\right)' = y' \cdot \frac{-1}{y^2} = \frac{-y'}{y^2}$.

Da y er en løsning til differentialligningen, må der gælde at $\frac{dy}{dx} = y' = y(b - ay)$

Dette giver nu $z' = \frac{-y(b - ay)}{y^2} = \frac{-yb + a \cdot y^2}{y^2} = -\frac{b}{y} + a = -b \cdot \frac{1}{y} + a = a - b \cdot \frac{1}{y} = a - b \cdot z$

Løsningen til $z' = a - b \cdot z$ må være $z(x) = \frac{a}{b} + k \cdot e^{-b \cdot x}$, hvor k er en konstant da

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b} + k \cdot e^{-b \cdot x}\right)' &= a - b \cdot \left(\frac{a}{b} + k \cdot e^{-b \cdot x}\right) \\ 0 - b \cdot k \cdot e^{-b \cdot x} &= a - a - b \cdot k \cdot e^{-b \cdot x} \\ -b \cdot k \cdot e^{-b \cdot x} &= -b \cdot k \cdot e^{-b \cdot x} \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Men da $z = \frac{1}{y}$, så har vi nu at $\frac{1}{y} = \frac{a}{b} + k \cdot e^{-b \cdot x}$. Så hvis vi isolere y , så må vi have løsnings formlen $\frac{1}{y} = \frac{a}{b} + k \cdot e^{-b \cdot x}$

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{a}{b} + k \cdot e^{-b \cdot x}\right) \cdot y \\ \frac{1}{\frac{a}{b} + k \cdot e^{-b \cdot x}} &= y \\ \frac{\frac{b}{a} \cdot 1}{\frac{b}{a} \left(\frac{a}{b} + k \cdot e^{-b \cdot x}\right)} &= y \\ \frac{\frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a} \cdot k \cdot e^{-b \cdot x}} &= y \end{aligned}$$

Da både a , b og k er konstanter, så vil $\frac{b}{a} \cdot k = c$

Og dermed fås

$$\frac{\frac{b}{a}}{1 + c \cdot e^{-b \cdot x}} = y$$

Skal ligning et vises, så sættes $M = \frac{b}{a}$, hvor ved vi får

$$\frac{M}{1 + c \cdot e^{-M \cdot a \cdot x}} = y$$

Hermed bevist

Eksempelvis:

En population af rotter udvikler sig efter en funktion y som funktion af tiden t , som kan beskrives ved følgende differentialligning

$$\frac{dy}{dt} = ay(2500 - y)$$

På det tidspunkt hvor der er 750 rotter er væksthastigheden 25.

Vi kan hermed bestemme konstanten a

$$25 = a \cdot 750(2500 - 750)$$
$$a = \frac{1}{52500} \approx 0.000019$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.000019 \cdot y(2500 - y)$$

Vi kan hermed opstille et udtryk for ligning ved:

$$y = \frac{2500}{1 + c \cdot e^{-0.000019 \cdot 2500 \cdot t}} = \frac{2500}{1 + c \cdot e^{-0.0476t}}$$

Konstante c kan bestemmes da vi får at vide at der til tiden 0 var 250 rotter.

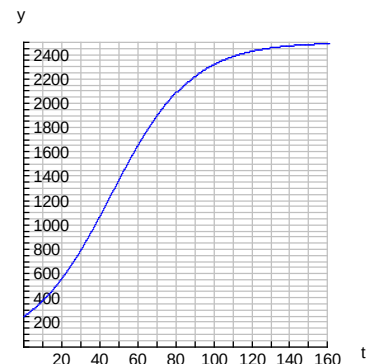
$$250 = \frac{2500}{1 + c \cdot e^{-0.0476 \cdot 0}} = \frac{2500}{1 + c}$$
$$250 + 250c = 2500$$

$$c = \frac{2250}{250} = 9$$

Dermed kan løsningen opskrives til

$$y = \frac{2500}{1 + 9 \cdot e^{-0.0476t}}$$

Hvis vi tegner den ind, så kan vi se, at rotterne på sigt vil stagnere ved 2500 rotter.



I Nspire kunne det løses ved

$$\text{solve}(25 = x \cdot 750 \cdot (2500 - 750), x) \rightarrow x = \frac{1}{52500}$$

$$\text{desolve}\left(y' = \frac{1}{52500} \cdot y \cdot (2500 - y) \text{ and } y(0) = 250, t, y\right) \rightarrow 2500 \cdot \frac{(1.04877)^t}{(1.04877)^t + 9}$$

$$\text{Så } y(t) = 2500 \cdot \frac{(1.04877)^t}{(1.04877)^t + 9}$$

Lav opgaver i [hæftet](#)

Egenskaber ved den logistiske vækst.

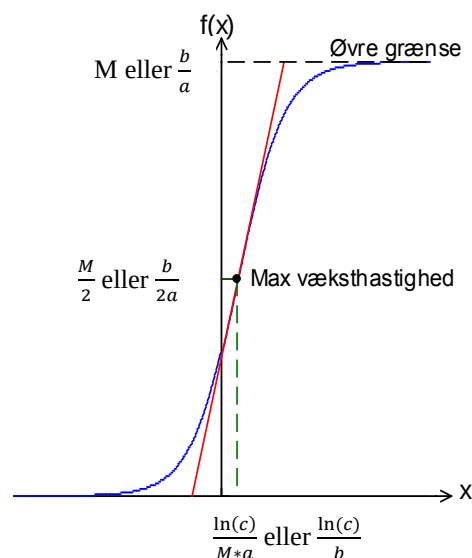
Hvis vi kigger på løsningen til den logistiske differentialligning, så har den nogle egenskaber som er værd at kigge lidt nærmere på. ([video](#))

Grafen til højre illustrerer sætningen nævnt nedenunder.

Vi husker på at løsningskurven er givet ved

$$y = \frac{M}{1+c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}} \text{ eller } y = \frac{\frac{b}{a}}{1+c \cdot e^{-b \cdot x}}$$

Et par af egenskaberne er åbenlyse, men lad os kigge på dem.



Sætning: Egenskaber ved den logistiske funktion f

- f er kontinuert
- f er voksende
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = M = \frac{b}{a}$
- Grafen er stejlest ved $y = \frac{b}{2a} = \frac{M}{2}$

Bevis: (video)

Vi viser egenskaberne for $y = \frac{\frac{b}{a}}{1+c \cdot e^{-b \cdot x}}$, hvor vi husker at a, b, c er positive konstanter.

- Alle funktioner som indgår $y = -b \cdot x$, $z = e^y$, $w = 1 + c \cdot z$ og $u = \frac{k}{w}$ er kontinuerte. Da $w > 0$, så er f også kontinuert iflg. regnereglerne for kontinuitet.
- Hvis f er voksende så er den afledte positiv på hele definitionsmængden

$$f'(x) = \frac{b^2 \cdot c \cdot e^{(b \cdot x)}}{a(e^{(b \cdot x)} + c)^2} > 0, \text{ da alle indgående størrelser er positive. Altså er } f \text{ voksende.}$$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{b}{a}}{1 + c \cdot e^{-b \cdot x}} = 0$, idet nævneren går mod ∞ .

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{b}{a}}{1 + c \cdot e^{-b \cdot x}} = \frac{b}{a} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + c \cdot e^{-b \cdot x}} = \frac{b}{a} \cdot 1 = \frac{b}{a}$, idet nævneren går mod 1

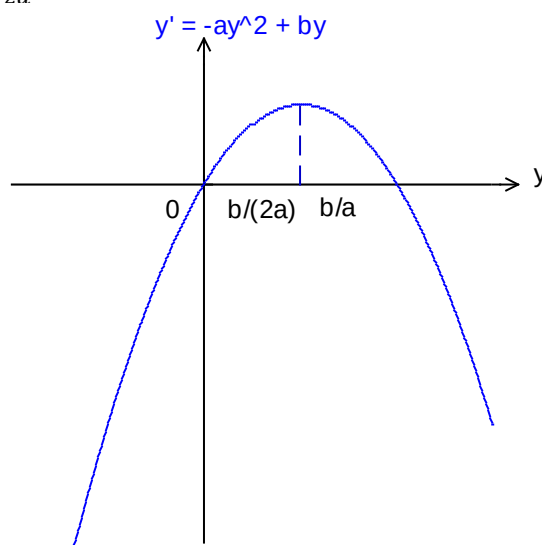
e) Størst væksthastighed

Metode 1.

$$y' = y(b - ay) \Leftrightarrow y' = by - ay^2 = -ay^2 + by$$

Grafen for y' er en parabel med grenene nedad og har dermed toppunkt (max) midt mellem rødderne.

$y' = 0$ giver os ifølge nulreglen at $y = 0$ eller $b - ay = 0 \Leftrightarrow y = \frac{b}{a}$. y' har altså max for $y = \frac{b}{2a}$.



Når vi kender y , så kan vi løse $\frac{b}{2a} = \frac{\frac{b}{a}}{1 + c \cdot e^{-b \cdot x}}$ i forhold til x . Dette gøres simpelt ved

$$\frac{b}{a} = \frac{2 \cdot \frac{b}{a}}{1 + c \cdot e^{-b \cdot x}}$$

Så dividerer vi på begge sider med $\frac{b}{a}$

$$1 = \frac{2}{1 + c \cdot e^{-b \cdot x}}$$

$$1 + c \cdot e^{-b \cdot x} = 2$$

$$c \cdot e^{-b \cdot x} = 1$$

$$e^{-b \cdot x} = \frac{1}{c}$$

Vi benytter potensreglen at $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$

$$\frac{1}{e^{b \cdot x}} = \frac{1}{c}$$

$$e^{b \cdot x} = c$$

$$b \cdot x \cdot \ln(e) = \ln(c)$$

$$x = \frac{\ln(c)}{b}$$

Hermed bevist

Metode 2 (her får vi brug for Nspire)

Find den dobbelt afledede. Denne vil fortælle hvornår væksten er størst ("hvornår vokser væksthastigheden mest"). Nulpunkterne til denne vil give os vores ønskede x-værdi. Se grafen nedenfor.

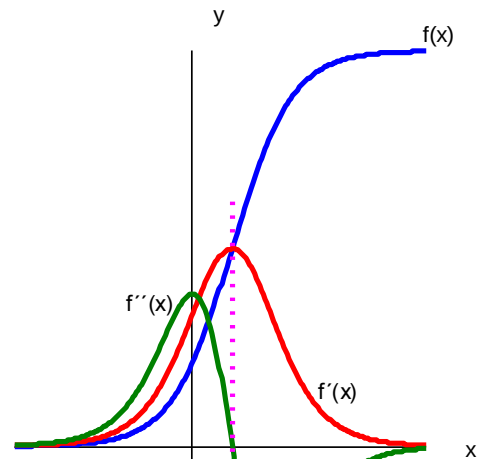
$$f''(x) = \frac{-(b^3) \cdot c \cdot e^{(b \cdot x)} \cdot (e^{(b \cdot x)} - c)}{a(e^{(b \cdot x)} + c)^3}$$

Når vi løser $f''(x) = 0$ fås $x = \frac{\ln(c)}{b}$, og $c > 0$

Kontrollerer nu lige, at der også er tale om et max.
Fortegn for f''

$$f''\left(\frac{\ln(c)}{b} - 1\right) > 0$$

$$f''\left(\frac{\ln(c)}{b} + 1\right) < 0$$



f'' er altså positiv til venstre for nulpunktet og negativ til højre for nulpunktet. $x = \frac{\ln(c)}{b}$ er dermed et max-punkt for væksthastigheden f' , og grafen er således stejlest for $y = f\left(\frac{\ln(c)}{b}\right) = \frac{b}{2a}$

Hermed bevist.

Lav opgaver i [hæftet](#)